

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования

«Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»

Центр профессиональной навигации и приема



УТВЕРЖДАЮ:

Проректор по дополнительному образованию

В.Л. Петров

« 08 » ноября 2022 г.

СОГЛАСОВАНО:

Директор Центра профессиональной навигации
и приема

М.А. Баранова

« 08 » ноября 2022 г.

Дополнительная профессиональная программа
(повышение квалификации)

**Решение планиметрических задач с использованием
векторной алгебры и метода координат**

Автор курса:

Гуляев Александр Сергеевич,
преподаватель математики ЦПНиП,
Исаева Татьяна Михайловна,
куратор проекта «Математическая верти-
каль» РЦ НИТУ МИСИС,
специалист по профнавигационной работе
ЦПНиП

Москва, 2022

РАЗДЕЛ 1. ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОГРАММЫ

Цель реализации программы – совершенствование общепрофессиональных компетенций слушателей в области решения планиметрических задач с использованием векторной алгебры и метода координат.

1.1. Совершенствуемые компетенции

№ п/п	Компетенции	Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование
		Бакалавриат
		Код компетенции
1.	Способен использовать психолого-педагогические технологии в профессиональной деятельности, необходимые для индивидуализации обучения, развития, воспитания, в том числе обучающихся с особыми образовательными потребностями	ОПК-6

1.2. Планируемые результаты обучения

№ п/п	Знать – уметь	Направление подготовки 44.06.01 Педагогическое образование
		Бакалавриат
		Код компетенции
1.	Знать: - способ решения задач планиметрии с помощью векторов; - барицентрический метод решения геометрических задач; - основные понятия аналитической геометрии на плоскости; - метод решения задач планиметрии введением декартовой системы координат; - преобразования графиков с помощью элементарных преобразований. Уметь: - идентифицировать тип конкретной задачи планиметрии и определять соответствующие технологии ее решения;	ОПК-6

	<ul style="list-style-type: none"> - решать типовые и нестандартные задачи планиметрии с использованием векторов, введения системы координат и метода центра масс; - решать задачи аналитической геометрии на плоскости; - строить графики с помощью элементарных преобразований, построив предварительно цепочку. 	
	<p>Знать:</p> <ul style="list-style-type: none"> - критерии определения уровня сложности заданий по планиметрии данного курса; - технологию составления дифференцированных по уровням сложности диагностических работ по темам геометрии и алгебры данного курса. <p>Уметь:</p> <ul style="list-style-type: none"> - составлять дифференцированные по уровням сложности диагностические работы по темам геометрии и алгебры данного курса в соответствии с критериями. 	ОПК-6

1.3. Категории обучающихся: уровень образования – высшее образование, область профессиональной деятельности – обучение математике на уровне среднего общего образования в общеобразовательной организации.

1.4. Форма обучения: очная, с применением дистанционных технологий

1.5. Трудоемкость программы: 36 часов.

1.6. Режим занятий: продолжительность 1-го занятия составляет 2 академических часа, количество занятий в неделю: 2-3 занятия.

РАЗДЕЛ 2. СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ

2.1. Учебный (тематический) план

п/п	Наименование разделов и тем	Аудиторные учебные занятия, учебные работы			Внеаудиторная работа	Формы контроля	Трудоемкость
		Всего ауд. часов	Лекции	Практические занятия	Самостоятельные работы		
1	2	3	4	5	6	7	8
1	Раздел 1 Векторная алгебра и центр масс	10	2	8	4		14
1.1	Доказательство утверждений с помощью векторной алгебры	5	1	4	2		7
1.2	Барицентрический метод решения планиметрических задач	5	1	4	2	Контрольная работа №1	7
2	Раздел 2 Координатный метод решения задач планиметрии	9	3	6	7		16
2.1	Элементы аналитической геометрии на плоскости	4	2	2	3		7
2.2	Решение планиметрических задач координатным методом	5	1	4	4	Контрольная работа №2	9
3	Раздел 3 Диагностическая работа	4		4	2		6
3.1	Методика составления дифференцированных по уровню сложности диагностических работ по темам курса	4		4	2	Проект «Диагностическая работа»	6
	Итоговая аттестация					Зачет по совокупности выполненных контрольных работ №№1-2 и проекта «Диагностическая работа»	
	Итого	23	5	18	13		36

2.2. Учебная программа

Наименование разделов и тем	Виды учебных занятий	Содержание
1	2	3
Раздел 1 Векторная алгебра и центр масс		
1.1 Доказательство утверждений с помощью векторной алгебры	Лекция, 1 час	Основные утверждения векторной алгебры, необходимые для решения задач планиметрии. Рассмотрение типов задач различного уровня сложности, которые целесообразно решать с помощью векторов. Технологии решения типовых и нестандартных задач с учетом характерных ошибок.
	Практическое занятие, 4 часа	Цель: совершенствование и формирование умений: идентифицировать тип конкретной задачи планиметрии и определять соответствующие технологии ее решения; решать типовые и нестандартные задачи планиметрии с использованием векторов. Работа в группах: Идентификация типа задачи и определения методов её решения. Обсуждение вариантов решений и подходов. Индивидуальная работа слушателей: Решение задач планиметрии методами векторной алгебры. Работа в малых группах: проектирование заданий проекта по теме 1.1 «Доказательство утверждений с помощью векторной алгебры» раздела 1 «Векторная алгебра и центр масс». Совместное подведение итогов работы.
	Самостоятельная работа, 2 часа	Решение планиметрических задач методами векторной алгебры. Разработка заданий дифференцированных по уровню сложности диагностических работ и их развернутое решение по теме 1.1 «Доказательство утверждений с помощью векторной алгебры» раздела 1 «Векторная алгебра и центр масс».
1.2 Барицентрический метод решения планиметрических задач	Лекция, 1 час	Математическое определение центра масс и его основные свойства. Основные типы задач различного уровня сложности, решаемые барицентрическим методом.
	Практическое занятие, 4 часа	Цель: формирование умения решать типовые и нестандартные задачи планиметрии с использованием метода центра масс. Индивидуальная работа слушателей: решение типовых и нестандартных планиметрических задач барицентрическим методом различного уровня сложности. Работа в малых группах:

		проектирование заданий диагностической работы по теме 1.2 «Барицентрический метод решения планиметрических задач» раздела 1 «Векторная алгебра и центр масс». Совместное подведение итогов работы.
	Самостоятельная работа, 2 часа	Разработка заданий дифференцированных по уровню сложности диагностических работ и их развернутое решение по теме 1.2 «Барицентрический метод решения планиметрических задач» раздела 1 «Векторная алгебра и центр масс». Контрольная работа №1 по темам раздела 1 «Векторная алгебра и центр масс»
Раздел 2 Координатный метод решения задач планиметрии		
2.1 Элементы аналитической геометрии на плоскости	Лекция, 2 часа	Прямая на плоскости, основные уравнения. Углы между прямыми, расстояния между точками и прямыми в декартовой системе координат. Решение задач различного уровня сложности.
	Практическое занятие, 2 часа	Цель: совершенствование и формирование умения решать задачи аналитической геометрии на плоскости. Индивидуальная работа слушателей: решение задач аналитической геометрии на плоскости различного уровня сложности. Совместное обсуждение вариантов решений и подходов. Работа в малых группах: проектирование заданий диагностической работы по теме 2.1 «Элементы аналитической геометрии на плоскости» раздела 2 «Координатный метод решения задач планиметрии». Совместное подведение итогов работы.
	Самостоятельная работа, 3 часа	Решение задач аналитической геометрии на плоскости. Проектирование заданий дифференцированных по уровню сложности диагностических работ по теме 2.1 «Элементы аналитической геометрии на плоскости» раздела 2 «Координатный метод решения задач планиметрии».
2.2 Решение планиметрических задач координатным методом	Лекция, 1 час	Типы и виды планиметрических задач, решаемых координатным методом. Особенности решения геометрических задач на плоскости при введении системы координат. Элементарные преобразования графиков функций.
	Практическое занятие, 4 часа	Цель: формирование умений: решать типовые и нестандартные задачи планиметрии с использованием введения системы координат; строить графики с помощью элементарных преобразований, построив предварительно цепочку. Индивидуальная работа слушателей: решение планиметрических задач различного уровня сложности; построение графиков с помощью элементарных преобразований, построив предварительно цепочку. Совместное обсуждение вариантов решений и подходов.

		<p>Работа в малых группах: проектирование заданий диагностической работы по теме 2.2 «Решение планиметрических задач координатным методом» раздела 2 «Координатный метод решения задач планиметрии».</p> <p>Совместное подведение итогов работы.</p>
	Самостоятельная работа, 4 час	<p>Решение типовых и нестандартных задач планиметрии с использованием векторов, введения системы координат и метода центра масс.</p> <p>Проектирование заданий дифференцированных по уровню сложности диагностических работ по теме 2.2 «Решение планиметрических задач координатным методом» раздела 2 «Координатный метод решения задач планиметрии».</p> <p>Контрольная работа №2 по темам раздела 2 «Решение планиметрических задач координатным методом»</p>
Раздел 3 Диагностическая работа		
3.1 Методика составления дифференцированных по уровню сложности диагностических работ по темам курса	Практическое занятие, 4 часа	<p>Цель: совершенствование и формирование умений: идентифицировать тип конкретной задачи планиметрии и определять соответствующие технологии ее решения; составлять дифференцированные по уровням сложности диагностические работы по темам геометрии и алгебры данного курса в соответствии с критериями.</p> <p>Работа в малых группах: идентификация типа конкретной задачи и определение технологии ее решения; определение уровня сложности заданий в соответствии с критериями и составление дифференцированных по уровню сложности диагностических работ по темам разделов 1-2.</p> <p>Совместное обсуждение вариантов решений и подходов.</p> <p>Совместное подведение итогов работы.</p>
	Самостоятельная работа, 2 час	<p>Проект «Диагностическая работа»: составление дифференцированных по уровню сложности диагностических работ по планиметрии (по темам разделов 1 – 2)</p>
Итоговая аттестация		<p>Зачет по совокупности выполненных контрольных работ №№1-2 и проекта «Диагностическая работа»</p>

РАЗДЕЛ 3. ФОРМЫ АТТЕСТАЦИИ И ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

3.1. Формы текущего контроля

Формы текущего контроля – контрольные работы № 1 и № 2 по предметному содержанию лекционных и практических занятий, проект «Диагностическая работа».

3.1.1. Варианты типовых заданий для контрольной работы № 1

1. Докажите, что средние линии любого четырёхугольника точкой пересечения делятся пополам.

2. В треугольнике ABC проведена медиана AM , точка P — ее середина. Прямая BP пересекает сторону AC в точке E . Найдите, в каком отношении точка E делит AC .

3.1.2. Варианты типовых заданий для контрольной работы № 2

1. В треугольнике ABC , вершины которого имеют координаты в декартовой системе координат: $A(2; 1)$, $B(5; -2)$, $C(-4; 4)$, найти:

а) косинус угла BCA ;

б) площадь треугольника ABC

в) координаты точки K – точки пересечения медиан;

г) уравнение высоты $АН$;

д) уравнение окружности, вписанной в треугольник ABC .

2. Прямые, содержащие катеты AC и CB прямоугольного треугольника ACB , являются общими внутренними касательными к окружностям радиусов 4 и 8. Прямая, содержащая гипотенузу AB , является их общей внешней касательной.

а) Докажите, что длина отрезка внутренней касательной, проведенной из вершины острого угла треугольника до одной из окружностей, равна половине периметра треугольника ACB .

б) Найдите площадь треугольника ACB .

3.1.3. Варианты типовых заданий для проекта «Диагностическая работа»

Типовые задания диагностической работы базового уровня:

1. Точки M и N лежат соответственно на сторонах AD и BC четырехугольника $ABCD$, причем $AM : MD = BN : NC = 3 : 4$. Докажите, что середины отрезков AB , MN и CD лежат на одной прямой, используя векторный метод.

2. В треугольнике ABC , вершины которого имеют координаты в декартовой системе координат: $A(0; 0)$, $B(4; 2)$, $C(1; 8)$, найти:

- а) косинус угла BAC ;
- б) площадь треугольника ABC ;
- в) уравнение медианы BK ;
- г) уравнение окружности, вписанной в треугольник ABC .

Типовые задания диагностической работы углубленного уровня:

1. В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка E так, что AE к EB равно 4, F – точка пересечения отрезка CE и медианы AD . Найдите отношение CF к FE барицентрическим методом.

2. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны стороны: $AC = 12$ и $BC = 5$. Окружность радиуса $0,5$ с центром в точке O на стороне BC проходит через вершину C . Вторая окружность касается катета AC , гипотенузы треугольника, а также внешним образом касается первой окружности. Применив метод координат найдите радиус второй окружности.

3.1.4. Требования к выполнению контрольных работ №№1-2

Контрольные работы выполняются слушателем на листах формата А4. Обязательным является наличие титульного листа. Контрольные работы включают 5 заданий, соответствующих заданиям рассмотренных тем. Решение заданий контрольной работы должно быть развернутым, т.е. полным и обоснованным. При необходимости слушатель может сопровождать

аналитическое решение графическими комментариями.

3.1.5. Требования к выполнению проекта

Проект «Диагностическая работа» выполняется слушателем на листах формата А4. Обязательно наличие титульного листа.

Выполнение проекта предусматривает составление двух вариантов диагностической работы, соответствующих двум уровням сложности. Каждый вариант должен содержать по два задания по каждой из тем разделов 1-2.

3.1.6. Критерии оценивания контрольных работ №№1-2 и проекта

- для оценки заданий контрольных работ № 1 и № 2 применяются критерии, аналогичные критериям школьных оценок.

- для оценки проекта:

+	Оба варианта диагностической работы соответствуют критериям уровня сложности заданий	50 баллов
+ / -	Имеются единичные несоответствия критериям уровня сложности заданий в одном варианте	35 баллов
- / +	Имеются единичные несоответствия критериям уровня сложности заданий в двух вариантах	25 баллов
-	Имеются многочисленные несоответствия критериям уровня сложности заданий	10 баллов

3.1.7. Оценивание контрольных работ №№1-2 и проекта

Каждый номер контрольных работ №№ 1-2 оценивается 0, 1, 2, 3, 4 или 5 баллами. Таким образом, максимальная оценка за одну контрольную работу составляет 25 баллов, за две контрольных работы – 50 баллов.

Оценивание контрольных работ №№ 1-2: количество баллов, полученное за контрольные работы №№ 1-2

Максимальный балл за проект – 50 баллов.

Оценивание проекта: количество баллов, полученное за проект.

3.2 Итоговая аттестация

Итоговая аттестация – зачет как совокупность выполненных контрольных работ №№ 1-2 и проекта «Диагностическая работа». Итоговая аттестация осуществляется на основании полученных совокупных баллов за контрольные работы №№1-2 и проект «Диагностическая работа». Зачет ставится, если по результатам выполнения контрольных работ и проекта слушатель набрал не менее 75 баллов.

Оценивание: зачет/незачет

РАЗДЕЛ 4. ОРГАНИЗАЦИОННО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОГРАММЫ

4.1. Учебно-методическое обеспечение и информационное обеспечение программы

4.1.1. Основная литература:

1. Александров, А.Д. Геометрия. 9 класс. Учебник. ФГОС/ А.Д. Александров и др. – М.: Просвещение, 2018. – 176 с.
2. Волчкевич, М. А. Математическая вертикаль. Геометрия. 9 класс. Учеб. пособие для общеобразоват. организаций / М. А. Волчкевич; под ред. И.В. Яценко. – Москва: Просвещение, 2021 – 320 с.
3. Атанасян Л.С. Геометрия. 9 класс. Методические рекомендации. /Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Глазков Ю.А. и др.. - 2-е изд. -М., Издательство «Просвещение», 2019 - 96 с.
4. Геометрия: 7–9 кл.: учебник для общеобразоват. организаций. /Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев [и др.] –13-е изд. – Москва: Просвещение, 2022 – 383 с.
5. В.А. Гусев, А.И. Медяник. Геометрия. 9 класс. Дидактические материалы. – М.: Просвещение, 2018. – 112 с.
6. Ефимов, Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. /Н.В. Ефимов. – 15-е изд. М: URSS, 2022 – 280 с.

4.1.2 Дополнительная литература:

1. Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 512 с.
2. Антонов В. И. и др. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Опорный конспект: учебное пособие. –М.: Проспект, 2011. - 144 с.
3. Захаров П.И., Семенов А.В., Трепалин А.С., Яценко И.В. Оптимальный банк заданий для подготовки к ЕГЭ. Единый государственный

экзамен 2015. Математика: учебное пособие. – М.: Интеллект-Центр, 2015 – 85 с.

4. Крамор В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс геометрии / В. С. Крамор. — 4-е изд. — М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2008. — 336 с.

5. Гайштут А., Литвиненко Г., Планиметрия: задачник к школьному курсу. – М.: АСТ – ПРЕСС: Магистр – S, 1998 – 112 с.

6. Балк, Марк Беневич. Геометрия масс / М. Б. Балк, В. Г. Болтянский. - М. : Наука, 1987. - 158 с.

7. Кушнир А.И. Векторные методы решения задач/ А.И.Кушнир. - Киев: Издательство «Обериг», 1994. – 207 с.

4.1.3. Интернет-ресурсы:

1. Образовательный портал «Решу ЕГЭ». Режим доступа: <https://math-ege.sdangia.ru/> (дата обращения: 7.11.2022).

2. Ларин Александр Александрович. Математика. Режим доступа: <https://alexlarin.net/> (дата обращения: 7.11.2022).

3. Открытый банк тестовых заданий ЕГЭ/Математика профильная. Режим доступа: <http://os.fipi.ru/tasks/2/a> (дата обращения: 7.11.2022).

4.2. Материально-технические условия реализации программы:

Для проведения очных занятий и итоговой аттестации используются учебные аудитории с меловой или маркерной доской, а также компьютерный класс с возможностью выхода в Интернет.